

선형모형의 가설하에서 비선형 검정통계량간의 상호관계 분석¹⁾

전예지²⁾ 조진서³⁾

본 연구에서는 비선형모형의 가설검정을 위해서 사용할 수 있는 왈드(Wald), 우도비(likelihood ratio), 라그랑주 승수(Lagrange multiplier) 검정통계량을 선형모형의 가설하에서 연구한다. 구체적으로 선형모형의 귀무가설 하에서 이들이 어떠한 접근분포를 취하며 어떤 관계가 있는지 살펴본다. 그 결과 식별의 문제가 두 겹으로 존재함에도 불구하고, 상기 세 검정통계량 간에는 삼위일체의 성질이 존재함을 보이고 이를 모의실험을 통하여 재확인한다.

주요용어: 비선형모형, 검정통계량, 왈드 통계량, 우도비 통계량, 라그랑주 승수 통계량, 삼위일체 성질

1. 서론

선형모형에 비선형 항목을 추가하여 선형모형의 가설을 검정하는 방식은 기존의 문헌에서 널리 사용되고 있는 방법이다. Bierens(1990)의 올바른 모형설정의 검정(correct specification test), Hansen(1996)의 가중치 부트스트랩(weighted bootstrap)에 의한 검정법, Lee, Granger, and White(1993)의 카이제곱 검정을 응용한 라그랑주 승수 검정법, Stinchcombe and White(1998)의 GCR(generically comprehensive revealing) 성격을 이용한 검정방법은 이의 예라고 할 수 있다.

통상의 조건에서 왈드(Wald), 우도비(likelihood ratio: LR), 라그랑주 승수(Lagrange multiplier: LM) 검정통계량간의 상호관계를 살펴보는 연구는 많이 존재하지만, 비정상적인 조건하에서 이를 비교하는 연구는 많지 않다. 이의 근본적인 이유는 비선형 항목에 추가된 모수가 선형모형의 가설하에서는 두 겹으로 식별이 되지 않는 비정상적인 상황이 발생하기 때문이다. 즉, 선행논문에서 칭하는 Davies(1977, 1987)의 식별의 문제가 두 겹으로 걸치는 경우이다. 기존의 문헌, 예를 들어서 Hayashi(2000)에서 밝히는 바와 같이 식별의 문제가 없는 정상적인 상황에서 상기한 세 가지 검정통계량이 점근적으로 귀무가설 하에서 동일한 검정통계량이라는 사실을 밝힌 것은 매우 잘 알려진 사실이다. 반면에, 데이비스의 식별의 문제가 선형모형의 가설과 연관되어 두 겹의 식별문제가 발생하는 경우에 이들 세 가지 검정통계량이 어떻게 연관되어 있는지를 밝히는 논문은 존재하지 않는다.

본 연구의 주목적은 이러한 사실과 연관된다. 즉, 상기의 검정통계량을 비선형모형가설검정과 관련하여 귀무가설 하에서 상호관계를 살펴보는 것이다. 좀 더 정확히 표현하면, 위의 세 가지 검정통계량이 귀무가설하에서 두겹의 식별의 문제를 극복하면서 동시에 점근적으로 동일한 검정통계량이 되기 위해서는 이들 검정통계량이 어떻게 정의되어야 하는가란 질문에 고전적 통계학의 입지에서 답하는 것이 본 논문의 주목적이다.

귀무가설 하에서 이들 검정통계량간의 관계를 살펴보기 위해서 준우도비 통계량의 근사치를 분석한 Cho and Ishida(2012)의 방법과 Cho, Ishida, and White(2011, 2014)의 인공 신경회로망(artificial neural network)에 의한 연구법을 적용한다. 선행논문에 따르면 선형모형에 대한 귀무가설은 두 가지의 하부 귀무가설로 나누어질 수 있고, 검정통계량의 점근적 귀무분포는 이들 두 가지의 귀무가설 하에서 구한 귀무분포를 통합하는 방식으로 얻어질 수 있다. 본 연구에서도 귀무가설을 두 가지의 경우로 나누어 각각 검정통계량의 점근적 귀무분포를 도출하고, 각각의 경우에 이들이 상호 어떠한 형태를 취하고 있는지 살펴보는 방식으로 본 연구의 목적을 달성한다.

본 연구의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 연구 목적과 이유, 사용할 모형 및 검정통계량을 제시하고 관련된 문헌을 살펴본다. 3장에서는 선형모형의 귀무가설을 두 가지 하부귀무가설로 나누고, 각각의 경우

1) 전예지의 석사학위 논문을 요약 및 수정하여 작성한 논문임.

2) 제1저자: 서울시 서대문구 연세로 50, 연세대학교 경제학부. kotenra@naver.com.

3) 교신저자: 서울시 서대문구 연세로 50, 연세대학교 경제학부. jinseocho@yonsei.ac.kr

에서 검정통계량이 어떠한 점근적 귀무분포를 취하는지 알아본 후, 이들을 통합하여 점근적 귀무분포를 구한다. 4장에서는 제시된 이론의 점검을 위하여 몬테 카를로(Monte Carlo) 모의실험을 시행한다. 결론은 5장에 있으며, 논문에서 사용된 수학 증명은 부록에 수록한다.

표기상 편의를 위하여 함수 f 와 $j = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $(d^j/d^jx)f(0)$ 은 $(d^j/d^jx)f(x)|_{x=0}$ 을 나타낸다.

2. 선형 가설 검정을 위한 모형 및 검정통계량

Bierens(1990)의 올바른 모형설정의 검정, Hansen(1996)의 가중치 부트스트랩에 의한 가설검정법, Lee, Granger, and White(1993)의 카이제곱 검정을 응용한 라그랑주 승수 검정법, Stinchcombe and White(1998)의 GCR성질을 이용한 검정법들에서 고려하는 $E(Y_t|X_t)$ 에 대한 모형은 다음의 모형과 일맥상 통하는 성질을 지니고 있다.

$$M_a := \{f(\cdot) : \Omega \mapsto \mathbb{R} : f(\alpha, \beta, \lambda, \delta) = \alpha + X_t' \beta + \lambda \psi(X_{tj} \delta)\}.$$

여기서 $\{(Y_t, X_t)' \in \mathbb{R}^{k+1} (k \in \mathbb{N}) : t = 1, 2, \dots\}$ 는 수량적인 자료를 의미하는데 독립적이며 동일한 분포를 따르고(identically and independently distributed, IID); $\psi(\cdot)$ 는 지수함수, 코사인함수와 같이 무한반복 미분가능한 해석함수(analytic function)로서 $\psi(0) \neq 0$ 이 성립한다고 가정한다. 또한 δ 는 스칼라로서 Δ 라는 집합의 요소를 지칭한다. Ω 는 $(\alpha, \beta', \lambda, \delta)'$ 의 모수공간이며 $\Omega := A \times B \times \Lambda \times \Delta$ 이다. A, B, Λ, Δ 는 각각 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ 에 속한 볼록하고 완곡한(compact) 모수공간이며, n 은 표본의 크기이다. 또한 X_{tj} 는 X_t 의 j 번째 변수를 지칭한다. 본 논문에서도 M_a 를 이용하여 검정통계량을 살펴보기로 한다.

여기서 $\psi(\cdot)$ 를 해석함수로 사용하는 이유는 모든 해석함수들은 테일러 급수를 사용하여 멱변환의 합으로 만들 수 있는 특징이 있는데, 이를 이용하면 임의의 비선형함수 부분을 잡아낼 수 있는 특성이 존재하기 때문이다. 그러므로 해석함수 부분의 존재여부를 검정함으로써 모형의 선형여부를 결정할 수 있다. 이를 위해서 다음과 같은 가설체계를 고려한다.

$$H_0 : \exists \beta_* \in \mathbb{R}^k, P[E(Y_t|X_t) = X_t' \beta_*] = 1 \text{ 대(對)} H_1 : \forall \beta \in \mathbb{R}^k, P[E(Y_t|X_t) = X_t' \beta] < 1.$$

여기서 아래첨자 “*”는 $E(Y_t|X_t)$ 를 모수를 이용하여 표현하기 위하여 사용했다. 예를 들어서, “*”를 사용하여 $E(Y_t|X_t)$ 를 $\alpha_* + X_t' \beta_* + \lambda_* \psi(X_{tj} \delta_*)$ 으로 표현한다고 보는 것이다.

선형모형에 비선형항을 추가하여 선형모형의 가설을 검정하는 방법은 이미 기존 문헌에서 많이 살펴지고 있는 방법이다. 하지만 H_0 를 검정하는 문헌이 상대적으로 많지 않은 이유는 H_0 의 검정이 일반적인 방법으로 행하여질 수 없기 때문이다. 귀무가설 H_0 가 성립하기 위해서는 $\lambda \psi'(X_{tj} \delta)$ 항이 0이 되어야 하고, 이는 식별의 문제를 초래한다. 이를 구체적으로 보면, 모수 (λ, δ) 에 제약을 가하여 모형 M_a 가 선형함수가 되는 경우는 총 두 가지 방법으로 분할할 수 있음을 알 수 있다. 우선, ① $\lambda_* = 0$ 이면 $E(Y_t|X_t) = \alpha_* + X_t' \beta_*$ 로 주어져서 $Z_t := (1, X_t)'$ 에 대하여 선형모형으로 바뀌고 δ_* 가 식별되지 않는다. 반면, ② $\delta_* = 0$ 이라면 $E(Y_t|X_t) = (\alpha_* + \lambda_* \psi(0)) + X_t' \beta_*$ 이어서 다시 Z_t 에 대하여 선형모형으로 바뀐다. 여기서 α_* 와 λ_* 는 따로 식별되지 않는다. 논의의 전개를 손쉽게 만들기 위하여 다음과 같은 두 가지 경우로 귀무가설 H_0 를 분할하여 살펴보도록 한다.

$$H_{0i} : \lambda_* = 0; \quad H_{0ii} : \delta_* = 0.$$

위 두 가지 경우 중 하나만 만족하여도 귀무가설은 성립한다. Cho, Ishida, and White(2011, 2014)는 이를 두 겹의 식별문제라고 칭한다. 귀무가설이 성립하는 경우, 모형 M_a 는 Z_t 에 대하여 선형함수가 되고, 그렇지 않은 경우에 모형 M_a 는 비선형함수가 된다.

아래에서는 이에 대한 가설검정을 통상의 검정통계량을 이용하여 차례로 살펴보기로 한다. 통상의 검정통계량으로 선행연구에서 많이 사용되는 왈드, 우도비, 라그랑쥐 승수 검정통계량을 한정하기로 하고, 이들에 대한 정의는 다음과 같이 Francq, Horvath, and Zakoian(2010)을 따르도록 한다.

$$W_n := n \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_a^2} - 1 \right) = n \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_a^2} \right), \quad LR_n := n \left(\log(\hat{\sigma}_0^2) - \log(\hat{\sigma}_a^2) \right), \quad LM_n := n \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right) = n \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_0^2} \right).$$

여기서 $\hat{\sigma}_0^2$ 과 $\hat{\sigma}_a^2$ 은 정의는 다음과 같다.

$$\hat{\sigma}_0^2 := \min_{\alpha, \beta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha - \mathbf{X}_t' \beta)^2, \quad \hat{\sigma}_a^2 := \min_{\alpha, \beta, \lambda, \delta} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Y_t - \alpha - \mathbf{X}_t' \beta - \lambda \psi(X_{tj} \delta))^2.$$

즉, $\hat{\sigma}_0^2$ 는 M_a 에 귀무가설을 제약하여 얻은 오차항의 분산에 대한 추정치고, $\hat{\sigma}_a^2$ 은 M_a 를 이용하여 얻은 오차항의 분산에 대한 추정치이다. 제약조건에 의하여 $\hat{\sigma}_0^2$ 은 언제나 $\hat{\sigma}_a^2$ 보다 크거나 같다. 여기서 한 가지 주목할 사항은 왈드, 우도비, 라그랑쥐 승수 검정통계량의 정의는 통상적인 상황을 가정할 때 연구자들의 선호도에 따라서 다양하게 제시되고 있지만, 본 연구에서는 주어진 정의를 본 연구의 목적에 맞추어서 제시하였다는 점이다. 즉, 상기한 정의에 따라서 검정통계량의 값을 계산할 적에 아래에서 상술하는 바와 같이 위의 검정통계량이 두 겹의 식별문제를 극복하면서 동시에 삼위일체 성질을 지니게 된다는 점을 보이기 위해서 Francq, Horvath, and Zakoian(2010)을 따라서 검정통계량을 정의한 것이다. 이와 더불어 한 가지 더 지적할 사항은 Cho, Ishida, White(2011, 2014) 그리고 White and Cho(2012)는 선형모형을 검정하기 위한 검정통계량으로서 준우도비 검정통계량(quasi-likelihood ratio test)을 제시하는데 이는 그 정의에 의하여 본 논문의 라그랑쥐 승수 검정통계량과 일치한다. 그러므로 그들의 준우도비 검정통계량에 대한 분석은 라그랑쥐 승수 검정통계량의 분석으로 같음한다.

3. 선형모형의 귀무가설 하에서 검정통계량의 분석

본 절에서는 $H_{0i} : \lambda_* = 0$ 의 경우와 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 를 따로 가정하고 검정통계량들의 귀무분포를 구한 후, 이들을 통합하는 방식으로 검정통계량들의 점근적 귀무분포를 구한다. 그 후에, 이들 귀무분포들의 상관관계를 비교한다.

3.1 $H_{0i} : \lambda_* = 0$ 을 가정하고 가설검정하는 경우

먼저 $H_{0i} : \lambda_* = 0$ 의 경우를 가정하고 검정통계량을 분석한다. 이를 위하여 매개변수 (λ, δ) 의 추정을 다음과 같이 행한다. 검정을 위한 비선형 최소자승추정치를 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}', \hat{\lambda}, \hat{\delta})'$ 으로 표시하기로 한다. 즉,

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}', \hat{\lambda}, \hat{\delta})' := \operatorname{argmax}_{\alpha, \beta, \lambda, \delta} - \sum_{t=1}^n [Y_t - \alpha - \mathbf{X}_t' \beta - \lambda \psi(X_{tj} \delta)]^2$$

으로 정의할 때, 주지하는 바와 같이 $\hat{\sigma}_a^2 = -n^{-1} L_n(\hat{\alpha}, \hat{\beta}', \hat{\lambda}, \hat{\delta})$ 가 성립한다. 여기서 $L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta)$ 는 준우도를 의미하는 것으로

$$L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta) := - \sum_{t=1}^n [Y_t - \alpha - \mathbf{X}_t' \beta - \lambda \psi(X_{tj} \delta)]^2$$

으로 정의되었다. $\hat{\sigma}_a^2$ 은 앞 장에서 표기한 검정통계량을 구성하는 주성분이므로 다음의 보조정리에서 제시하는 바와 같이 이의 값을 구할 수 있다.

보조정리 1: 상기한 모형 M_a 의 가정에서 다음이 성립한다.

$$\hat{\sigma}_a^2 = n^{-1} \mathbf{U}' \mathbf{M} \mathbf{U} - n^{-1} \max_{\delta \in \Delta} \frac{(\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}(\delta)}.$$

여기서 $\boldsymbol{\psi}(\delta) := [\psi(X_{1j}\delta) \cdots \psi(X_{nj}\delta)]'$, $\mathbf{U} := [U_1, \dots, U_n]'$, $\mathbf{M} := \mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$, $\mathbf{Z} := [\mathbf{Z}'_1, \dots, \mathbf{Z}'_n]'$, 그리고 $U_t := Y_t - E(Y_t | \mathbf{X}_t)$ 으로 정의되었다. \square

이의 증명은 기계적으로 도출할 수 있으므로 따로 제시하지 않는다. 반면, $\hat{\sigma}_0^2$ 는 귀무가설을 제약한 후에 얻은 잔차제곱의 평균이므로 $\hat{\sigma}_0^2 = n^{-1} \mathbf{U}' \mathbf{M} \mathbf{U}$ 로 표현가능하다. 그러므로 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$\hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}_a^2 = n^{-1} \max_{\delta \in \Delta} \frac{(\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}(\delta)}.$$

단, 여기서 $\delta = 0$ 이면 우항의 함수는 정의되지 않는다. 그러므로 함수를 δ 가 0으로 수렴함에 따라 얻어지는 값을 $\delta = 0$ 일 때 얻어지는 함수값으로 정의한다. 이러한 간단한 관계식을 이용하여 W_n 과 LM_n 을 다음과 같이 다른 방식으로 표현할 수 있다.

보조정리 2: 상기한 모형 M_a 의 가정에서 다음이 성립한다.

$$\text{i) } W_n = \max_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\hat{\sigma}_a^2} \frac{(\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}(\delta)}.$$

$$\text{ii) } LM_n = \max_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\hat{\sigma}_0^2} \frac{(\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\boldsymbol{\psi}(\delta)' \mathbf{M} \boldsymbol{\psi}(\delta)}. \quad \square$$

위의 증명은 상술한 과정으로부터 자명하므로 따로 설명하지 않는다.

보조정리 2에 제시한 표현법을 이용하여 왈드와 라그랑주 승수 검정통계량의 귀무분포를 구할 수 있다. 이를 위해서는 함수중심극한정리(functional central limit theorem)와 일양대수의 법칙(uniform law of large numbers)을 필요로 한다. 즉, 왈드와 라그랑주 승수 검정통계량의 분자에는 함수극한정리를 적용하고, 분모에는 일양대수의 법칙을 적용해야 할 필요가 있다. 이미 가정한 모형을 전제로, 함수중심극한정리와 일양대수의 법칙을 적용하기 위해서 다음의 조건을 추가로 가정한다.

가정 1: i) $\{(Y_t, \mathbf{X}_t')' \in \mathbb{R}^{k+1} (k \in \mathbb{N}) : t = 1, 2, \dots\}$ 는 t 에 대하여 독립적이며 동일한 분포(identically and independently distributed, IID)를 따른다.

ii) Ω 는 $(\alpha, \beta', \lambda, \delta)'$ 의 모수공간이며 $\Omega = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{A} \times \Delta$ 이며 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \Delta$ 는 각각 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{k+1}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$ 에 속한 볼록하고 응골찬(compact) 모수공간이다.

iii) $\psi(\cdot)$ 는 Ω 의 경계값을 제외한 모든 부분에서 무한반복 미분가능한 해석함수(analytic function)이고 $\psi''(0) \neq 0$ 이 성립한다.

iv) $i = 1, 2, \dots, k$ 에 대하여 $E[X_{ti}^8] \leq \infty$ 이며 $E[U_t^8] \leq \infty$ 이거나 $E[X_{ti}^{16}] \leq \infty$ 이며 $E[U_t^4] \leq \infty$ 이다.

v) 독립적이며 동일한 분포를 지닌 수열 $\{M_t\}$ 에 대해 $\sup_{\delta \in \Delta} |\psi(X_{tj}\delta)| \leq M_t$ 이고

$\sup_{\delta \in \Delta} |(\partial/\partial\delta)\psi(X_{t_j}\delta)| \leq M_t$ 이며 $E[M_t^4] \leq \infty$ 이다.

vi) 각 $\epsilon > 0$ 와 $\delta \in \Delta(\epsilon) := \{\delta \in \Delta : |\delta| \geq \epsilon\}$ 에 대하여 정방행렬 $V_1(\delta)$ 와 $V_2(\delta)$ 는 양의 정부호(positive definite) 행렬이다. 여기서 $V_1(\delta)$ 와 $V_2(\delta)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$V_1(\delta) := \begin{bmatrix} E[U_t^2 \psi(X_{t_j}\delta)^2] & E[U_t^2 \psi(X_{t_j}\delta) \mathbf{Z}_t'] & E[U_t^2 X_{t_j}^2 \psi(X_{t_j}\delta)] \\ E[U_t^2 \mathbf{Z}_t \psi(X_{t_j}\delta)] & E[U_t^2 \mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'] & E[U_t^2 X_{t_j}^2 \mathbf{Z}_t] \\ E[U_t^2 X_{t_j}^2 \psi(X_{t_j}\delta)] & E[U_t^2 X_{t_j}^2 \mathbf{Z}_t'] & E[U_t^2 X_{t_j}^4] \end{bmatrix},$$

$$V_2(\delta) := \begin{bmatrix} E[\psi(X_{t_j}\delta)^2] & E[\psi(X_{t_j}\delta) \mathbf{Z}_t'] & E[X_{t_j}^2 \psi(X_{t_j}\delta)] \\ E[\mathbf{Z}_t \psi(X_{t_j}\delta)] & E[\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t'] & E[X_{t_j}^2 \mathbf{Z}_t] \\ E[X_{t_j}^2 \psi(X_{t_j}\delta)] & E[X_{t_j}^2 \mathbf{Z}_t'] & E[X_{t_j}^4] \end{bmatrix}.$$

□

만일 $\delta = 0$ 이면 $\psi(X_{t_j}0) = 0$ 으로 도출되어서 $H_{0_i} : \lambda_* = 0$ 하에서의 W_n 과 LM_n 은 정의되지 않는다. 이 때문에 가정 1.vi)에서 모수공간 Δ 를 $\Delta(\epsilon)$ 으로 조정한 것이다. 이는 Cho, Ishida, and White(2011, 2014)에서 취한 절차와 같다.

위의 가정 1과 모형 M_a 에 대한 조건을 이용하여 다음과 같은 결론을 도출할 수 있다.

정리 1: 가정 1과 모형 M_a 에 대한 조건 및 $H_{0_i} : \lambda_* = 0$ 하에서 다음이 성립한다.

i) $W_n^{(1)} \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta(\epsilon)} Z(\delta)^2$.

ii) $LR_n^{(1)} \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta(\epsilon)} Z(\delta)^2$.

iii) $LM_n^{(1)} \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta(\epsilon)} Z(\delta)^2$. 여기서 $Z(\cdot)$ 은 모든 $\delta, \tilde{\delta} \in \Delta(\epsilon)$ 에 대하여 다음과 같은 공분산 구조를 지닌 영평균 가우시안 확률과정(mean-zero Gaussian stochastic process)이다.

$$\rho(\delta, \tilde{\delta}) := E[Z(\delta)Z(\tilde{\delta})] = \frac{T(\delta, \tilde{\delta})}{\sqrt{E[U_t^2]}J(\delta, \delta) \sqrt{E[U_t^2]}J(\tilde{\delta}, \tilde{\delta})},$$

$$T(\delta, \tilde{\delta}) := E[U_t^2 \psi_*(X_{t_j}\delta)\psi_*(X_{t_j}\tilde{\delta})], \quad J(\delta, \tilde{\delta}) := E[\psi_*(X_{t_j}\delta)\psi_*(X_{t_j}\tilde{\delta})],$$

$$\psi_*(X_{t_j}'\delta) := \psi(X_{t_j}\delta) - E[\psi(X_{t_j}\delta)\mathbf{Z}_t'] E[\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t']^{-1} \mathbf{Z}_t.$$

그리고 윗첨자 (1)은 H_{0_i} 하에서 얻은 통계량임을 표시한다.

□

정리 1.iii)의 라그랑주 승수 검정통계량의 귀무분포에 대한 증명은 Cho, Ishida, and White(2011, theorem 1)에서 이미 상술되었기에 본 논문의 부록에서는 생략한다. 그들의 조건에 $k=1$ 을 추가하여 본 연구의 틀에 맞추면 주어진 라그랑주 귀무분포를 도출할 수 있다.

정리 1. i)의 왈드 검정통계량의 귀무분포를 도출하기 위하여 아래의 식을 정리한다.

$$W_n = \max_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\hat{\sigma}_a^2} \frac{(\psi(\delta)' \mathbf{M} \mathbf{U})^2}{\psi(\delta)' \mathbf{M} \psi(\delta)}.$$

분자에 해당하는 부분은 함수중심극한정리를 이용하여 가우시안 확률과정으로 수렴함을 보일 수 있다.⁴⁾

4) 함수중심극한정리와 일양대수의 법칙의 적용에 대한 증명은 Cho, Ishida, and White(2001)의 Lemma 1의 증명과

즉, δ 의 함수로서

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}\psi(\delta)' \mathbf{M}\mathbf{U} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\psi(X_{t_j}'\delta)U_t - \frac{1}{n}\sum\psi(X_{t_j}'\delta)\mathbf{Z}_t' \left(\frac{1}{n}\sum\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t'\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum\mathbf{Z}_tU_t \\ &\Rightarrow \ddot{g}(\delta) - E(\psi(X_{t_j}'\delta)\mathbf{Z}_t')E(\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t')G =: g(\delta). \end{aligned}$$

여기서 $\ddot{g}(\delta)$ 은 δ 에 대하여 가우시안 확률 함수(Gaussian random function)이고, G 는 가우시안 확률변수(Gaussian random variable)이다. 함수중심극한정리를 이용하면 모든 δ 의 함수로서 우항은 δ 의 함수인 가우시안 확률 함수가 된다. 즉, δ 의 함수로서 $n^{-1/2}\psi(\delta)' \mathbf{M}\mathbf{U} \Rightarrow g(\delta)$ 가 된다.

분모에 해당하는 부분은 일양대수의 법칙을 이용하여 다른 함수로 수렴함을 보일 수 있다. 즉, δ 의 함수로서

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\psi(\delta)' \mathbf{M}\psi(\delta) &= \frac{1}{n}\sum\psi(X_{t_j}\delta)^2 - \frac{1}{n}\sum\psi(X_{t_j}\delta)\mathbf{Z}_t' \left(\frac{1}{n}\sum\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t'\right)^{-1} \frac{1}{n}\sum\mathbf{Z}_t\psi(X_{t_j}\delta) \\ &\rightarrow_{a.s.} E[\psi(X_{t_j}\delta)^2] - E[\psi(X_{t_j}\delta)\mathbf{Z}_t']E(\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t')^{-1}E[\psi(X_{t_j}\delta)\mathbf{Z}_t] =: \sigma(\delta)^2. \end{aligned}$$

그러므로 이들을 분자와 분모를 정리하면 아래와 같은 식을 도출할 수 있다. δ 의 함수로서

$$\frac{\psi'(\delta)\mathbf{M}\mathbf{U}}{\sqrt{\psi(\delta)' \mathbf{M}\psi(\delta)}} \Rightarrow \frac{g(\delta)}{\sqrt{\sigma(\delta)^2}}.$$

그러면 이의 비율은 다시 다른 가우시안 확률과정이 될 것이다. 정리 1에서 주어진 $Z(\delta)$ 는 이를 표현한 것이다. 그리고 $W_n^{(1)}$ 의 극한은 이들 극한 비율의 함수를 δ 에 대하여 극대화한 값으로 표현한 것이다. 즉, $W_n^{(1)} \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta(\epsilon)} Z(\delta)^2$ 이다.

우도비 검정통계량에 대한 증명은 테일러 확장정리를 이용하여 $LR_n^{(1)}$ 와 $W_n^{(1)}$ 의 형태가 거의 같음을 보이고 $W_n^{(1)}$ 의 극한분포를 이용하여 $LR_n^{(1)}$ 의 극한분포를 도출하는 방식으로 증명할 수 있다. 이를 구체적으로 설명하면, 정리 1. ii)에 주어진 우도비 검정통계량의 귀무분포는 다음의 식과 같이 표현가능하다.

$$LR_n = n \log(\hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_a^2) = n \log\left(\frac{\hat{\sigma}_a^2 + \hat{\sigma}_0^2 - \hat{\sigma}_a^2}{\hat{\sigma}_a^2}\right) = n \log(1 + W_n/n).$$

대수의 안에 있는 요소는 표본의 크기가 커지면 1로 수렴하는 값이 된다. 이 사실을 이용해서 대수를 1을 중심으로 테일러 확장한다면, 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$LR_n = n\left(W_n/n - \frac{1}{2}W_n^2/n^2\right) + o_p(1) = W_n + o_p(1).$$

따라서, $LR_n = W_n + o_p(1)$ 이 성립한다. 그러므로 귀무가설하에서 왈드 검정통계량과 우도비 검정통계량은 같은 근사치를 지니는 통계량임을 알 수 있다.

정리 1이 의미하는 바는 검정통계량의 귀무분포가 통상적인 카이제곱의 분포와는 다르다는 점이다. 특히, Cho, Ishida, and White(2011, 2014)에서 보인 라그랑주 승수 검정통계량에 대한 성질이 다른 검정통계량에 대하여서도 모두 발견된다는 점은 주목할 만한 사실이다.

3.2 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 을 가정하고 가설검정하는 경우

동일하다.

H_{0ii} 를 검정하기 위해서 $\delta_* = 0$ 으로 두면 α_* 와 λ_* 가 서로 식별되지 않는다. 그러므로 모수를 식별하기 위한 방책으로 우선 α 또는 λ 를 일정한 값으로 고정시킨 후 검정통계량의 극한분포를 얻고, 그 후에 λ 또는 α 에 대하여 극대화하는 과정으로 귀무분포를 도출한다. 서로 다른 방식으로 α 또는 λ 를 고정시킨 후, 이들이 상호 어떤 관계가 있는지 살펴봄으로써 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 에서 점근적 귀무분포를 도출할 수 있다.

3.2.1 λ_* 가 식별되지 않는 경우

이제 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 의 경우를 가정하고 검정통계량을 분석한다. 먼저, 모수추정을 위하여 $L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta)$ 을 (α, β) 에 대하여 최대화한 후, 두 번째로 λ 에 대하여 최대화하도록 한다. $L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta)$ 을 (α, β) 에 대하여 최대화한 이후의 집중준우도(concentrated quasi-likelihood)는 다음과 같이 정의된다.

$$L_n(\delta; \lambda) := \max_{\alpha, \beta} L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta) = -(\mathbf{Y} - \lambda\psi(\delta))' \mathbf{M}(\mathbf{Y} - \lambda\psi(\delta)).$$

그리고 집중우도 $L_n(\delta; \lambda)$ 에서 λ 를 모수취급하는 이유는 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 집중준우도를 δ 에 대하여 테일러 확장하기 위해서이다. H_{0ii} 하에서는 λ_* 와 α_* 가 따로 식별되지 않으므로 λ 를 우선 고정시키고 집중준우도를 구하는 것이다. 집중준우도함수를 0을 중심으로 δ 에 대하여 테일러 전개식을 구하면 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$L_n(\delta; \lambda) = L_n(0; \lambda) + \frac{d}{d\delta} L_n(0; \lambda) \delta + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\delta^2} L_n(0; \lambda) \delta^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\delta^3} L_n(0; \lambda) \delta^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4}{d\delta^4} L_n(0; \lambda) \delta^4 + o_p(1).$$

이들 미분치와 이의 극한들을 다음의 보조정리에서 제시한다. 이들에 대한 증명은 이미 Cho, Ishida, and White(2011, 2014)에 제시되어있기에 증명은 생략한다.

보조정리 3: 상기한 모형 M_a 와 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 만약 $\psi''(0) \neq 0$ 라면 가정 1하에서 다음이 성립한다.

- i) $(d/d\delta)L_n(0; \lambda) = 2\lambda\psi'(0)\mathbf{i}'\mathbf{D}_1\mathbf{M}\mathbf{U} = 0$.
- ii) $n^{-1/2}(d^2/d\delta^2)L_n(0; \lambda) = n^{-1/2}2\lambda\psi''(0)\mathbf{i}'\mathbf{D}_2\mathbf{M}\mathbf{U} \Rightarrow 2\lambda\psi''(0)W_1$. 여기서 W_1 과 Ω_1 은 $W_1 \sim N(0, \Omega_1)$ 이며 $\Omega_1 := E(U_t^2 X_{tj}^4) - E(U_t^2 X_{tj}^2 \mathbf{Z}_t') E(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t')^{-1} E(\mathbf{Z}_t' X_{tj}^2)$ 이다.
- iii) $n^{-1/2}(d^3/d\delta^3)L_n(0; \lambda) = n^{-1/2}2\lambda\psi'''(0)\mathbf{i}'\mathbf{D}_3\mathbf{M}\mathbf{U} \Rightarrow W_2$. 여기서 W_2 과 Ω_2 은 $W_2 \sim N(0, \Omega_2)$ 이며 $\Omega_2 := E(U_t^2 X_{tj}^6) - E(U_t^2 X_{tj}^3 \mathbf{Z}_t') E(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t')^{-1} E(\mathbf{Z}_t' X_{tj}^3)$ 이다.
- iv) $n^{-1}(d^4/d\delta^4)L_n(0; \lambda) = n^{-1}[2\lambda\psi^{(4)}(0)\mathbf{i}'\mathbf{D}_4\mathbf{M}\mathbf{U} - 6\lambda^2\psi''(0)^2\mathbf{i}'\mathbf{D}_2\mathbf{M}\mathbf{D}_2\mathbf{i}] \rightarrow_{a.s.} -6\lambda^2\psi''(0)^2 S$. 여기서 $\mathbf{i} := [1 \cdots \cdots 1]'_{n \times 1}$, $S := E(X_{jt}^4) - E(X_{jt}^2 \mathbf{Z}_t') E(\mathbf{Z}_t \mathbf{Z}_t')^{-1} E(X_{jt}^2 \mathbf{Z}_t)$, $\mathbf{D}_0 := \mathbf{I}$. 그리고 $m = 1, 2, \dots$, 에 대하여

$$\mathbf{D}_m := \begin{bmatrix} (X_1')^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (X_2')^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (X_n')^m \end{bmatrix}$$

으로 정의되었다. □

여기서 한 가지 주목할 사항은 가정 1에서 $\psi''(0) \neq 0$ 라는 조건이 이차도함수와 사차도함수의 극한을 도출하는 데 사용되었다는 점이다. 만약, 이 조건이 적용되지 않으면 이차도함수와 사차도함수에 중심극한의 정리와 대수의 법칙을 유의미하게 적용할 수 없다. 그리고 바로 다음 문단에서 보일 테일러확장은 사차도

함수보다 더 큰 고차의 도함수를 이용해서 얻어야 한다. $\psi''(0) \neq 0$ 라는 조건을 이용해서 이러한 과정을 미연에 방지한 것이다.

테일러 확장을 보조정리 3에서 구한 일차도함수, 이차도함수, 삼차도함수, 사차도함수를 이용하여 정리하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$L_n(\delta; \lambda) = L_n(0; \lambda) + n^{-1/2} \lambda \psi''(0) i' D_2 M U \zeta_n^2 + \frac{1}{3} n^{-3/4} \psi'''(0) \lambda i' D_3 M U \zeta_n^3 + \frac{1}{24} n^{-1} (2\psi^{(4)}(0) \lambda i' D_4 M U - 6\lambda^2 \psi''(0)^2 i' D_2 M U D_2 i).$$

여기서 $\zeta_n := n^{1/4} \delta$ 로 정의되었다. 보조정리 3을 이용하여 우항의 극한을 구할 수 있다. 즉, 연속사상정리를 이용하면 다음이 도출된다.

$$L_n(\delta; \lambda) - L_n(0; \lambda) \Rightarrow \lambda \psi''(0) W_1 \zeta^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \psi''(0)^2 S \zeta^4.$$

그러므로 연속사상정리를 다시 한 번 더 적용하면,

$$\arg \max_{\zeta} (L_n(\delta; \lambda) - L_n(0; \lambda)) \Rightarrow \arg \max_{\zeta} \lambda \psi''(0) W_1 \zeta^2 - \frac{1}{4} \lambda^2 \psi''(0)^2 S \zeta^4$$

임을 알 수 있다. 극한에서 적정 ζ 의 값을 ζ_* 으로 표시한다고 하면, 이의 값은 다음과 같이 구체적으로 도출된다.

$$\zeta_*^2 = \max[0, (2W_1)/(\lambda \psi''(0)S)].$$

극한의 함수가 ζ 에 대하여 4차의 다항식 함수이고, ζ_*^2 은 0보다 적을 수 없기 때문에 $\max[\cdot]$ 을 사용하여 적정치를 표시하였다. 그리고 극한에서의 극대화된 값은 다음과 같이 도출된다.

$$\max_{\lambda} \max_{\delta} \max_{\alpha, \beta} \{L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta) - L_n(0; \lambda)\} \Rightarrow \begin{cases} 0 & \text{만약 } \zeta_*^2 = 0; \\ W_1^2/S & \text{만약 } \zeta_*^2 > 0. \end{cases}$$

여기서 λ 에 대해서는 극대화 과정은 추가적으로 적용되어도 아무런 영향을 미치지 아니한다. 왜냐하면 δ 에 대해서 극대화하는 중 λ 는 소거되어 극한의 함수는 λ 에 대하여 무용함수이기 때문이다. 결국,

$$W_n = \frac{1}{\sigma_0^2} \max_{\lambda} \max_{\delta} \max_{\alpha, \beta} \{L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta) - L_n(0; \lambda)\} \Rightarrow \max[0, W_1/(\sigma_* \sqrt{S})]^2$$

를 도출할 수 있다. 여기서 σ_* 는 $\hat{\sigma}_0$ 의 극한으로서 귀무가설하에서는 $E[U_t^2]^{1/2}$ 의 값과 같다. 이 극한치의 결과는 Cho, Ishida, and White(2011)에서 얻은 결과를 본 연구의 주제에 적용하여 얻어냈다. 이와 꼭 같은 방식을 우도비 검정통계량에도 적용할 수 있다. 다음의 정리 2에서 이에 대한 극한정리를 요약한다.

정리 2: 가정 1과 모형 M_a 에 대한 조건 및 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 만약 $\psi(0) \neq 0$ 이라면 다음이 성립한다.

i) $W_n^{(2)} \Rightarrow \max[0, W_1/(\sigma_* \sqrt{S})]^2.$

ii) $LR_n^{(2)} \Rightarrow \max[0, W_1/\sigma_* \sqrt{S}]^2.$

iii) $LM_n^{(2)} \Rightarrow \max[0, W_1/\sigma_* \sqrt{S}]^2$. 윗첨자 (2)는 H_{0ii} 에서 λ 를 고정한 후의 통계량임을 표시한다. \square

정리 2.iii) 라그랑주 승수 검정통계량의 귀무분포는 Cho, Ishida, and White(2011, theorem 2)에서 도출될 수 있다. 정리 2.ii) 정리 1의 증명에서 이미 $LR_n = W_n + o_p(1)$ 이 성립함을 보였기에 이를 이용하면 주어진 주장이 자명해진다.

3.2.2 α_* 가 식별되지 않는 경우

3.2.1에서와 같은 방법으로 모수추정을 위하여 $L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta)$ 을 (λ, β) 에 대하여 최대화한 후, 두 번째로 α 에 대하여 최대화하도록 한다. 이는 전 절에서 행한 방법을 순서만 바꿔서 극대화하는 과정이다. $L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta)$ 을 (λ, β) 에 대하여 최대화한 집중준우도는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$L_n(\delta; \alpha) := \max_{\lambda, \beta} L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta) = - (Y - \alpha \mathbf{i})' \mathbf{P}(\delta) (Y - \alpha \mathbf{i}).$$

여기서 $\mathbf{P}(\delta) := \mathbf{I} - \mathbf{Q}(\delta) [\mathbf{Q}(\delta)' \mathbf{Q}(\delta)]^{-1} \mathbf{Q}(\delta)'$ 이고 $\mathbf{Q}(\delta) := [\mathbf{X}, \psi(\delta)]$ 이다. 위 식은 집중준우도함수를 0을 중심으로 δ 에 대하여 테일러 전개식에 의해 근사한다면 다음을 얻을 수 있다.

$$L_n(\delta; \alpha) = L_n(0; \alpha) + \frac{d}{d\delta} L_n(0; \alpha) \delta + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\delta^2} L_n(0; \alpha) \delta^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\delta^3} L_n(0; \alpha) \delta^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^4}{d\delta^4} L_n(0; \alpha) \delta^4 + o_p(1).$$

이들의 미분치를 다음의 보조정리에서 Cho, Ishida, and White(2011)에 제시되어 있는 결과를 응용하여 도출한다.

보조정리 4: 상기한 모형 M_a 와 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 만약 $\psi(0) \neq 0$ 라면 다음이 성립한다.

i) $(d/d\delta)L_n(0; \alpha) = 0$.

ii) $n^{-1/2}(d^2/d\delta^2)L_n(0; \alpha) = n^{-1/2}2(\alpha_* - \alpha) \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right) \mathbf{i}' \mathbf{D}_2 \mathbf{M} \mathbf{U} + o_p(n^{1/2})$.

iii) $n^{-1/2}(d^3/d\delta^3)L_n(0; \alpha) = O_p(1)$.

iv) $n^{-1}(d^4/d\delta^4)L_n(0; \alpha) = -6(\alpha_* - \alpha)^2 \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right)^2 \mathbf{i}' \mathbf{D}_2 \mathbf{M} \mathbf{D}_2 \mathbf{i} + o_p(n)$. \square

여기서 주목할 사항은 이차도함수와 사차도함수의 값이 보조정리 3에서 구한 값들과 대동소이하다는 점이다. 그렇기 때문에 보조정리 3에서 제시한 극한의 값을 보조정리 4에 제시된 도함수들의 계수를 조정 한 후, 적용할 수 있다.

이러한 과정을 염두하고 3.2.1절에서와 마찬가지로 테일러확장식을 정리하면 다음과 같은 확장식을 도출할 수 있다.

$$L_n(\delta; \alpha) = L_n(0; \alpha) + \frac{1}{\sqrt{n}} (\alpha_* - \alpha) \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right) \mathbf{i}' \mathbf{D}_2 \mathbf{M} \mathbf{U} \zeta_n^2 - \frac{6}{24n} (\alpha_* - \alpha)^2 \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right)^2 \mathbf{i}' \mathbf{D}_2 \mathbf{M} \mathbf{D}_2 \mathbf{i} \zeta_n^4 + o_p(1).$$

여기서 앞의 절과 같이 $\zeta_n := n^{1/4} \delta$ 로 정의되었다. 이는 다시 보조정리 3에 제시한 극한값을 이용하여 다음과 같은 극한으로 도출됨을 알 수 있다.

$$L_n(\delta; \alpha) - L_n(0; \alpha) \Rightarrow \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right) (\alpha_* - \alpha) W_1 \zeta^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right)^2 (\alpha_* - \alpha)^2 S \zeta^4.$$

그러므로 연속사상정리를 적용하면,

$$\operatorname{argmax}_{\zeta}(L_n(\delta; \alpha) - L_n(0; \alpha)) \Rightarrow \operatorname{argmax}_{\zeta} \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right) (\alpha_* - \alpha) W_1 \zeta^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\psi''(0)}{\psi(0)} \right)^2 (\alpha_* - \alpha)^2 S \zeta^4$$

이 도출된다. 그리고 이러한 결과를 이용하여 라그랑주 승수 검정통계량의 점근적 귀무분포를 다음과 같이 도출할 수 있다.

$$W_n = \frac{1}{\sigma_a^2} \max_{\alpha} \max_{\delta} \max_{\lambda, \beta} \{ L_n(\alpha, \beta, \lambda, \delta) - L_n(0; \alpha) \} \Rightarrow \max [0, W_1 / (\sigma_* \sqrt{S})]^2.$$

이는 3.2.1절에서 취한 절차와 동일한 것이기 때문에 자세한 도출과정은 생략한다. 다만, 이전과 마찬가지로 α 는 δ 에 대하여 극대화하는 와중에 점근적으로 소거된다. 그렇기 때문에 α 에 대하여 극대화하는 과정은 점근적으로 유효하지 않는 과정이라는 점을 지적한다.

이렇게 구한 극한이 의미하는 바는 3.2.1절에서 구한 W_n 과 3.2.2절에서 구한 W_n 의 차이는 확률적으로 무시가능하다는 점이다. 그렇기 때문에 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 구한 W_n 의 점근적 귀무분포는 λ 를 먼저 고정하든지, 또는 α 를 먼저 고정하든 지에 상관없이 동일한 것임을 알 수 있다. 이러한 결과는 W_n 의 경우에만 해당하는 것이 아니다. 다른 검정통계량에 대하여서도 동일한 결과를 얻을 수 있다. 다음의 정리 3에서 이를 제시한다.

정리 3: 가정 1과 모형 M_a 에 대한 조건 및 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 만약 $\psi(0) \neq 0$ 이라면 다음이 성립한다.

i) $W_n^{(3)} \Rightarrow \max [0, W_1 / (\sigma_* \sqrt{S})]^2.$

ii) $LR_n^{(3)} \Rightarrow \max [0, W_1 / (\sigma_* \sqrt{S})]^2.$

iii) $LM_n^{(3)} \Rightarrow \max [0, W_1 / (\sigma_* \sqrt{S})]^2.$ 윗첨자 (3)은 H_{0ii} 에서 α 를 고정한 후의 통계량임을 표시한다. □

정리 3에 대한 증명은 정리 2와 동일한 절차를 통해서 완성되기에 자세한 과정은 생략한다.

3.3 귀무가설 하에서 검정통계량간의 상호 연관성 분석

이번 절에서는 $H_{0i} : \lambda_* = 0$ 하에서 구한 $W_n^{(1)}$ 과 $H_{0ii} : \delta_* = 0$ 하에서 구한 $W_n^{(2)}$ 와 $W_n^{(3)}$ 를 비교하고자 한다. 3.2.1절과 3.2.2절에서 $W_n^{(2)} = W_n^{(3)} + o_p(1)$ 임은 이미 상술했기에 $W_n^{(1)}$ 과 $W_n^{(2)}$ 의 관계에 집중하도록 한다. $H_0 : \delta_* = 0$ 또는 $\lambda_* = 0$ 하에서 δ 가 0으로 수렴할 경우를 살펴보도록 하자. 보조정리 2.ii)에서 구한 결론을 이용하면 다음의 식이 성립함을 알 수 있다.

$$\sup_{\lambda} \{ L_n(\lambda; \delta) - L_n(0; \delta) \} = N(\delta) / D(\delta).$$

여기서 $N(\delta) := \{ \psi(\delta)' M U \}^2$, $D(\delta) := \psi(\delta)' M \psi(\delta)$ 이다. 왈드 검정통계량의 값은 이를 δ 에 대하여 극대화를 취한 후에 다시 $\hat{\sigma}_a^2$ 으로 나눈 값이다. 이 때, δ 에 대하여 극대화하기 전에 δ 가 0으로 수렴할 경우, 어떠한 결과가 나오는지 알아본다. 다음의 보조정리 5는 Cho, Ishida, and White(2011, 2014)에서 재증명없이 원용한 것이다. 우선, 수식을 간단히 표현하기 위해서 $N^\ell(\delta) := (d^\ell / d\delta^\ell) N(\delta)$ 와 $D^\ell(\delta) := (d^\ell / d\delta^\ell) D(\delta)$ 으로 정의한다.

보조정리 5: 가정 1과 모형 M_a 에 대한 조건 및 $H_0: \delta_* = 0$ 또는 $\lambda_* = 0$ 하에서 다음이 성립한다.

i) $\ell := 0, 1, 2, 3$ 에 대하여 $\lim_{\delta \rightarrow 0} N^\ell(\delta) = 0, \lim_{\delta \rightarrow 0} D^\ell(\delta) = 0.$

ii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} N^4(\delta) = 6\psi''(0)(i' D_2 MU)^2.$

iii) $\lim_{\delta \rightarrow 0} D^4(\delta) = 6\psi''(0)i' D_2 MD_2 i.$

□

위 보조정리와 로피탈 정리를 활용하면 아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N(\delta)}{\widehat{\sigma}_a^2 D(\delta)} = \frac{\lim_{\delta \rightarrow 0} N^4(\delta)}{\lim_{\delta \rightarrow 0} \widehat{\sigma}_a^2 D^4(\delta)} = \frac{(i' D_2 MU)^2}{\widehat{\sigma}_a^2 i' D_2 MD_2 i}.$$

이는 $W_n^{(1)} \geq W_n^{(2)}$ 을 의미한다. 왜냐하면

$$W_n^{(1)} = \sup_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\widehat{\sigma}_0^2} \frac{(\psi(\delta)' MU)^2}{\psi(\delta)' M \psi(\delta)} \geq \sup_{\delta \in \Delta} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\widehat{\sigma}_0^2} \frac{(\psi(\delta)' MU)^2}{\psi(\delta)' M \psi(\delta)} = W_n^{(2)}$$

이기 때문이다. 따라서 $W_n^{(1)} \geq W_n^{(2)} = W_n^{(3)} + o_p(1)$ 임을 도출해낼 수 있다. 이와 꼭 같은 절차를 알드 검정통계량과 우도비 검정통계량에 대하여서도 적용할 수 있다. 다음의 정리 4에 이의 결론을 수록한다.

정리 4: 가정 1과 모형 M_a 에 대한 조건 및 $H_0: \delta_* = 0$ 또는 $\lambda_* = 0$ 하에서 다음이 성립한다.

i) $W_n \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta} Z(\delta)^2.$

ii) $LR_n \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta} Z(\delta)^2.$

iii) $LM_n \Rightarrow \sup_{\delta \in \Delta} Z(\delta)^2.$

□

정리 4.iii)의 라그랑주 승수 검정통계량의 귀무분포는 Cho, Ishida, and White(2011)에서 상술된 절차와 동일하기에 이에 대한 증명은 생략한다. 이미 알드 검정통계량에 대한 증명은 상술하였다. 그리고 정리 4. ii)와 정리 1에서 $LR_n = W_n + o_p(1)$ 이 성립함을 보였다. 그러므로 정리 4. i)에서 구한 부등식을 LR_n 에 적용하면 $LR_n^{(1)} \geq LR_n^{(2)} + o_p(1) = LR_n^{(3)} + o_p(1)$ 를 도출해낼 수 있다. 즉,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(1 + \frac{N(\delta)}{\widehat{\sigma}_a^2 D(\delta)} \right) = \frac{\lim_{\delta \rightarrow 0} N^4(\delta)}{\lim_{\delta \rightarrow 0} \widehat{\sigma}_a^2 D^4(\delta)} + o_p(1) = \frac{(i' D_2 MU)^2}{\widehat{\sigma}_a^2 i' D_2 MD_2 i} + o_p(1).$$

이는 $LR_n^{(1)} \geq LR_n^{(2)}$ 을 의미한다. 왜냐하면

$$LR_n^{(1)} = \sup_{\delta \in \Delta} \frac{1}{\widehat{\sigma}_a^2} \frac{(\psi(\delta)' MU)^2}{\psi(\delta)' M \psi(\delta)} \geq \sup_{\delta \in \Delta} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\widehat{\sigma}_a^2} \frac{(\psi(\delta)' MU)^2}{\psi(\delta)' M \psi(\delta)} = LR_n^{(2)}$$

이기 때문이다. 따라서, $LR_n^{(1)} \geq LR_n^{(2)} + o_p(1) = LR_n^{(3)} + o_p(1)$ 임을 도출해낼 수 있다. 이로써 증명이 완성된다.

여기서 주목할 사항은 귀무가설하에서 세 검정통계량의 극한분포가 같다는 점과 더불어 귀무근사치 역

시 같다는 사실이다. 그렇기 때문에, 표본의 크기가 커질수록 모두 같은 값으로 수렴한다는 사실이다. 이는 비록 식별의 문제가 존재하지만, 삼위일체성질이 위 세 가지 통계량에 적용되기 때문에 도출되는 결과이다.

그리고 귀무가설하에서 $\hat{\sigma}_0^2$ 와 $\hat{\sigma}_a^2$ 의 확률극한값은 하부귀무가설의 종류에 상관없이 σ_a^2 로 수렴한다. 그러므로 $LM_n = W_n + o_p(1)$ 가 도출되고 이는 주어진 주장을 증명하는 것이다.

4. 몬테 카를로 (Monte Carlo) 모의실험 연구

본 장에서는 이전 장에서 제시한 이론들을 점검하기 위하여 몬테 카를로 모의실험을 실행한다. 검정통계량의 귀무분포를 비교하기 위하여 비교 기준이 되는 점근 귀무분포를 구한 후, 왈드, 우도비, 라그랑주 승수 검정통계량의 귀무분포를 비교한다.

다음과 같은 조건 하에서 모의실험을 진행한다. 첫째, 실험을 위한 자료의 생성 과정은

$$Y_t = \alpha_* + \beta_* X_t + U_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

와 같고 여기서 $X_t = Y_{t-1}$, $U_t \sim IID N(0, \sigma_*^2)$ 으로 설정한다. 주목할 만한 사실은 오차항의 분포가 조건부 동분산을 가정하고 얻어졌다는 사실이다. 두 번째, 이러한 자료생성 과정이 주어졌을 때 $E[Y_t | Y_{t-1}]$ 에 대하여 아래와 같은 귀무모형을 설정한다.

$$E[Y_t | Y_{t-1}] = \alpha + \beta Y_{t-1}.$$

즉, 자기회귀 확률과정에 대하여 자기회귀 모형을 설정한 것이다. 세 번째, 귀무가설을 검증하기 위한 대안 모형으로 다음의 모형,

$$f(Y_{t-1}; \alpha, \beta, \lambda, \delta) = \alpha + \beta Y_{t-1} + \lambda \exp(\delta Y_{t-1})$$

를 사용한다. 여기서 δ 에 대한 모수공간은 $[-0.5 \ 0.5]$ 와 $[-1.0 \ 1.0]$ 의 두 가지 경우를 고려한다. 정리 4에서 나타난 바와 같이, 귀무분포는 δ 의 모수공간에 따라서 다른 귀무분포를 갖는다. 이러한 점을 감안하기 위해서 δ 의 모수공간을 명확히 제시한다.

정리 4에서 제시한 영평균 가우시안 확률과정은 이러한 모형을 전제하는 경우에, Cho, Ishida, and White(2011)에서 다음의 영평균 가우시안 확률과정의 분포와 같은 분포를 지니고 있음을 보인바 있다.

$$\tilde{Z}(\delta) := \frac{\sum_{k=2}^{\infty} \{\text{var}(Y_t)\}^{k/2} \delta^k Z_k / \sqrt{k!}}{\{\exp(\text{var}(Y_t)\delta^2) - 1 - \text{var}(Y_t)\delta^2\}^{1/2}}.$$

여기서 $Z_k \sim IID N(0,1)$ 을 따른다. 문제는 모의실험을 진행하면서 무한의 Z_k 를 생성할 수 없다는 점이다. 이를 해소하기 위해서 아래의 식에서 K 의 값을 충분히 크게 주면, $\tilde{Z}(\cdot; K)$ 가 $Z(\cdot)$ 를 근사하는 데 사용할 수 있다.

$$\tilde{Z}(\delta; K) := \frac{\sum_{k=2}^K \{\text{var}(Y_t)\}^{k/2} \delta^k Z_k / \sqrt{k!}}{\{\exp(\text{var}(Y_t)\delta^2) - 1 - \text{var}(Y_t)\delta^2\}^{1/2}}.$$

또한, $\text{var}(Y_t)$ 를 알 수 없기에 이를 $\widehat{\text{var}}_n(Y_t)$ 으로 대체하면

$$\hat{Z}(\delta; K) := \frac{\sum_{k=2}^K \{\widehat{\text{var}}(Y_t)\}^{k/2} \delta^k Z_k / \sqrt{k!}}{\{\exp(\widehat{\text{var}}(Y_t)\delta^2) - 1 - \widehat{\text{var}}(Y_t)\delta^2\}^{1/2}}$$

와 같다. 여기서 $\widehat{\text{var}}_n(Y_t) := n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_t^2 - [n^{-1} \sum_{t=1}^n Y_t]^2$ 이다. 이 분산의 추정치는 일관성을 지니고 있으므로 표본의 크기가 커질수록 귀무분포가 $\hat{Z}(\cdot; K)$ 을 이용할 때 점근적으로 $\tilde{Z}(\cdot; K)$ 을 이용해서 얻은 귀무분포를 수렴함을 알 수 있다. 이런 식으로 다른 분포를 지닌 가우시안 확률과정을 제시하는 방법은 Cho and White(2010)에서도 찾아볼 수 있다.

아래에서는 $\hat{Z}(\cdot; K)$ 를 이용해서 얻은 임계치의 값을 이용하여 가설검정을 귀무가설하에서 수행한다. 첫 번째 경우로 $\Delta := [-0.5 \ 0.5]$ 인 경우와 두 번째 경우로 $\Delta := [-1.0 \ 1.0]$ 인 경우에 얻은 임계치를 <표 4.1>에 수록하였다. 20,000번 반복하여 실증분포를 구함으로써 점근적 귀무분포를 근사하였다. 또한 극대화 과정을 효율적으로 수행하기 위해서 Δ 를 0.01의 간격을 지닌 격자(grid)로 나눈 후에 각각의 격자 값에서 계산된 $\hat{Z}(\delta; K)^2$ 을 격자에 대하여 극대화하는 방식으로 수행하였다.

이렇게 구한 임계치에 각각의 왈드, 우도비, 라그랑쥐 승수 검정통계량을 구하고 이들의 실증기각률을 <표 4.2>와 <표 4.3>에 수록하였다. 표는 각 그룹별 실험을 통해 얻은 1%, 5%, 10% 유의수준 하에서 검정통계량간의 실증적 기각확률을 나타낸다. 이들의 수치는 5,000번의 독립된 실험을 반복함으로써 얻어진 값들이다.

표의 결과를 통하여 두 모수공간의 실증적 기각확률이 모두 명목수준에 접근한다는 것을 확인할 수 있다. 첫 번째 모수공간($\Delta := [-0.5 \ 0.5]$)에서 표본수가 적을 경우에는 왈드 검정통계량이, 표본의 크기가 1,000이상일 경우에는 우도비 검정통계량이 타 통계량에 비하여 명목수준에 가깝다는 것을 알 수 있다. 두 번째 모수공간($\Delta := [-1.0 \ 1.0]$)에서 표본수가 적을 경우에는 라그랑쥐 승수 검정통계량이, 표본의 크기가 1,000 이상일 경우에는 우도비 검정통계량이 타 통계량에 비하여 명목수준에 가깝다는 것을 알 수 있다. 또한, 모수공간이 좁을수록 표본의 크기가 증가함에 따라서 명목수준으로 수렴하는 정도가 나아진다. 이는 정리 4에서 의미하는 바를 그대로 나타내는 것이다. 즉, 표본의 크기가 커짐에 따라서 각 통계량의 점근적 귀무분포를 수렴하고 있음을 나타내는 것이다. 또한, 점근적 귀무분포가 모두 같은 임계치를 모든 검정통계량에 적용할 수 있음을 주목한다. 이는 세 가지 검정통계량이 삼위일체 성질을 귀무가설하에서 만족하기 때문에 따라서 발생하는 사항이다.

이에 대한 사항을 다른 유의수준에 대하여서 확인하기 위하여 모의실험에 의하여 구한 실증적 귀무분포를 그림으로 표현하였다. <그림 4.1>~<그림 4.6>에 이들 세 검정통계량의 분포를 그린 그림이다. 이들 본 논문에는 수록하지 않았지만, δ 의 모수공간을 $[-2.0 \ 2.0]$ 로 확장한 경우에도 비슷한 결과를 얻을 수 있었다. 비록 표본의 크기가 적을 때는 상대적으로 다소 큰 차이가 존재하였지만, 표본의 크기가 1,000 이상이면, 왈드, 우도비, 라그랑쥐 승수 검정통계량이 모두 명목 유의수준에 가까운 값으로 귀무가설을 기각하였다. 이는 모수공간이 적은 경우에 대하여 얻은 것과 같은 결과이다. 결국 모수공간의 크기가 커짐에 따라 점근이론을 적용하기 위해서는 더 큰 표본의 크기를 요함을 알 수 있었다.

5. 결론

본 논문에서는 비선형모형가설검정과 관련하여 왈드, 우도비, 라그랑쥐 승수의 상호관계를 선형모형의 귀무가설하에서 살펴보았다. 귀무가설 하의 비교를 위하여, 모수에 제약을 가하여 모형이 선형함수가 되는 경우를 두 가지의 하부 귀무가설로 나누고 각각의 경우에서 검정통계량간의 관계를 살펴보았다. 이러한 비교절차가 유의미한 이유는 선형모형의 귀무가설하에서는 식별의 문제가 존재하고 이러한 문제하에서 검정통계량간의 관계를 살펴본 기존의 연구가 존재하지 않았기 때문이다. 그 결과, 두 가지 경우에서 왈드, 우

도비, 라그랑쥐 승수 검정통계량은 동일한 점근적 귀무분포를 따르는 것으로 나타났고, 삼위일체 성질이 통상의 경우와 마찬가지로 본 연구에서 제시하는 조건하에서 성립함을 보일 수 있었다. 이와 더불어 본론에서 제시한 이론들을 점검하기 위하여 몬테 카를로 모의실험을 실행하였고, 그 결과 본 논문에서 적시한 사실들이 모의실험을 통하여 시현됨을 알 수 있었다. 본 논문의 가장 큰 공헌은 다음과 같이 요약할 수 있다. 왈드, 우도비, 라그랑쥐 검정통계량이 통상의 식별의 문제가 존재하지 않는 상황에서는 다양한 형태로 선행문헌에서 정의되고 있는데, 본 연구에서는 식별의 문제가 두 겹으로 존재함에도 불구하고, 삼위일체의 성질을 그대로 지니는 왈드, 우도비, 라그랑쥐 검정통계량을 정의하였다는 점에 의의가 있다.

감사의 글

본 연구 중 전예지가 참가한 부분은 연세대학교 일반대학원 재학 당시 작성되었고, 조진서가 참가한 부분은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (NRF-2010-332-B00025).

References

- Bierens, H. (1990). A Consistent Conditional Moment Test of Functional Form. *Econometrica*, 58, 1443-1458.
- Cho, J. and Ishida, I. (2012). Testing for the Effects of Omitted Power Transformations. *Economics Letters*, 117, 287-290.
- Cho, J., Ishida, I. and White, H. (2011). Revisiting Test for Neglected Nonlinearity Using Artificial Neural Network. *Neural Computaation*, 23, 1133-1186.
- Cho, J., Ishida, I. and White, H. (2014). Testing for Neglected Nonlinearity Using Twofold Unidentified Models under the Null and Hexic Expansions. *Essays in Nonlinear Time Series Econometrics. A Festschrift in Honor of Timo Terasvirta Oxford*. Oxford University Press.
- Cho, J. and White, H. (2010). Testing for Unobserved Heterogeneity in Exponential and Weibull Duration Models. *Journal of Econometrics*, 157, 458-480.
- Davies, R. (1977). Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative. *Biometrika*, 64, 247-254.
- Davies, R. (1987). Hypothesis Testing When a Nuisance Parameter is Present Only under the Alternative. *Biometrika*, 74, 33-43.
- Franqcq, Christian and Horvath, Lajos and Zakoian, Jean-Michel. (2010). Sup-tests for linearity in a general nonlinear AR(1) model when the supremum is taken over the full parameter space. *Econometric Theory*, 26, 965-993.
- Hansen, B. (1996). Inference When a Nuisance Parameter is Not Identified under the Null Hypothesis. *Econometrica*, 64, 413-480.
- Hayashi, F. (2000). *Econometrics*. NJ: Princeton University Press.
- Lee, T.-H., White, H. and Granger, C. (1993). Testing for Neglected Nonlinearity in Time Series Models: A Comparison of Neural Network Methods and Alternative Tests. *Journal of Econometrics*, 56, 269-290.
- Stinchcombe, M. and White, H. (1998). Consistent Specification Testing with Nuisance Parameters Present Only under the Alternative. *Econometric Theory*, 14, 295-324.
- White, H. and Cho, J. (2012). Higher-Order Approximations for Testing Neglected Nonlinearity. *Neural Computation*, 24, 273-287.

<표 4.1> 점근적 임계치

유의수준 \ Δ	$[-0.5, 0.5]$	$[-1.0, 1.0]$
1%	7.7243	8.0443
5%	4.6748	5.2480
10%	3.4558	3.9225

가우시안 확률과정을 20,000번 반복하여 생성한 점근 임계값이다. 자료는 $Y_t = 0.5 Y_{t-1} + U_t$ 을 이용하여 생성하였으며, 격자의 간격은 0.01, K 는 150이다.

<표 4.2> 검정통계량의 실증적 기각 확률($\Delta := [-0.5, 0.5]$)

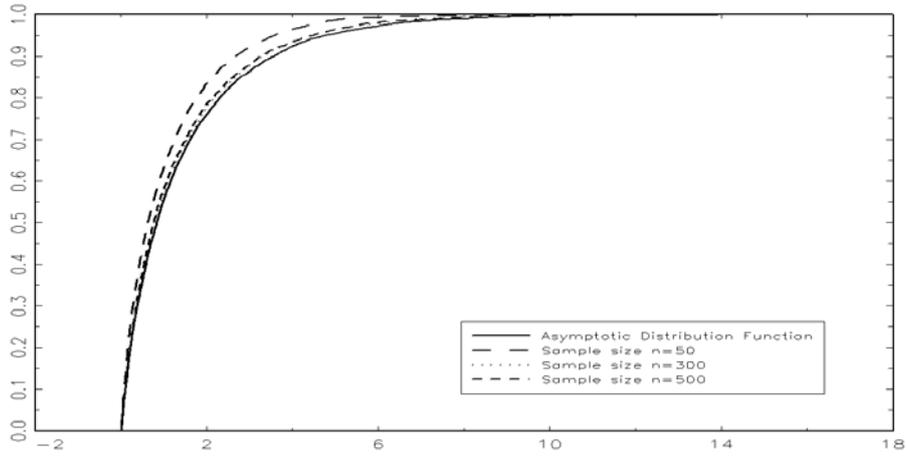
검정통계량 \ n	유의수준	50	100	300	500	1,000	2,000	5,000	7,000
왈드	1%	0.68	1.03	1.24	1.21	1.23	0.99	1.02	1.05
	5%	3.39	4.19	4.33	5.22	5.14	5.14	4.65	5.26
	10%	7.24	8.56	9.62	10.00	10.54	10.33	9.98	10.79
우도비	1%	0.52	0.74	0.88	1.09	1.16	0.91	1.22	1.21
	5%	2.51	3.44	3.80	4.24	4.58	4.50	4.83	4.94
	10%	5.72	7.17	7.81	8.40	.56	9.17	9.39	9.65
라그랑주 승수	1%	0.67	0.71	1.02	0.98	1.34	1.22	1.11	1.18
	5%	3.48	3.77	4.63	4.57	5.40	5.19	5.43	4.99
	10%	6.95	7.82	9.43	9.56	10.74	10.00	10.29	10.98

5,000번을 반복하여 1%의 유의수준에서 얻은 실증적 기각확률이다. 자료 생성 과정은 $Y_t = \alpha_* + \beta_* Y_{t-1} + U_t$ 이다. 여기서 $U_t \sim IID N(0,1)$ 를 따르고 $(\alpha_*, \beta_*) = (0, 0.5)$ 이다.

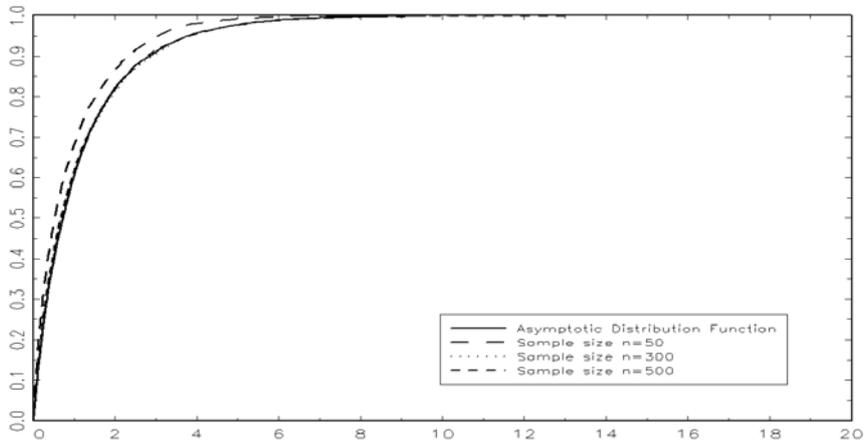
<표 4.3> 검정통계량의 실증적 기각 확률($\Delta := [-1.0, 1.0]$)

검정통계량 \ n	유의수준	50	100	300	500	1,000	2,000	5,000	7,000
왈드	1%	0.67	0.91	1.13	1.37	1.52	1.76	1.68	1.61
	5%	2.68	3.68	4.36	4.62	5.29	5.63	5.65	5.82
	10%	5.28	6.84	8.29	8.58	9.45	9.60	10.08	10.47
우도비	1%	0.55	0.59	0.86	0.96	0.98	0.81	1.17	0.95
	5%	2.88	3.37	4.20	4.28	4.44	4.24	4.79	4.72
	10%	6.78	7.56	9.03	9.11	9.73	9.35	9.99	9.73
라그랑주 승수	1%	0.81	0.89	1.27	1.20	1.55	1.72	1.77	1.72
	5%	3.52	3.63	4.35	5.03	5.52	5.60	6.04	5.47
	10%	6.46	7.06	8.11	9.23	10.11	9.30	10.43	9.91

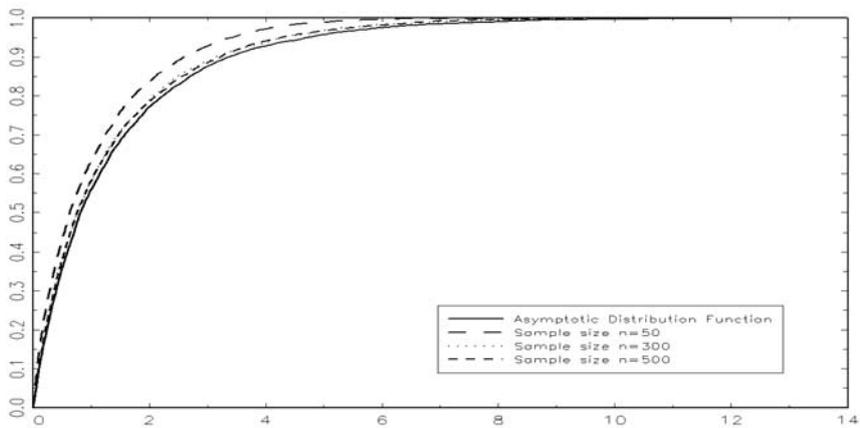
5,000번을 반복하여 1%의 유의수준에서 얻은 실증적 기각확률이다. 자료 생성 과정은 $Y_t = \alpha_* + \beta_* Y_{t-1} + U_t$ 이다. 여기서 $U_t \sim IID N(0,1)$ 를 따르고 $(\alpha_*, \beta_*) = (0, 0.5)$ 이다.



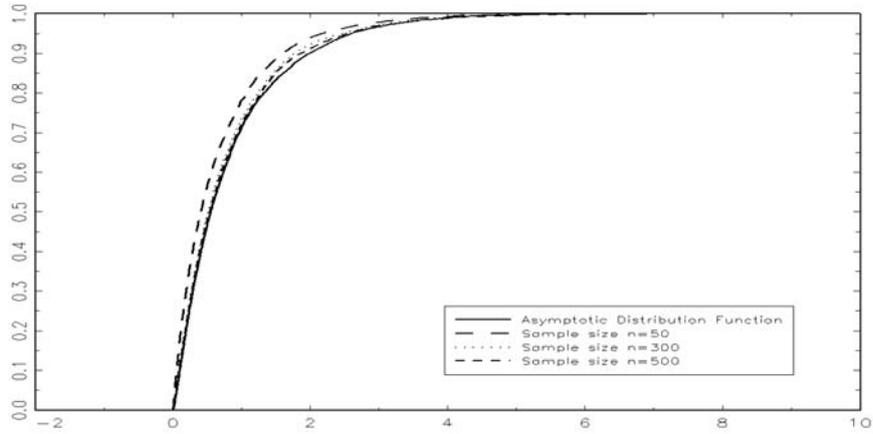
<그림 4.1> 왈드 검정통계량의 점근적 귀무분포와 실증분포($\Delta := [-0.5 \ 0.5]$)



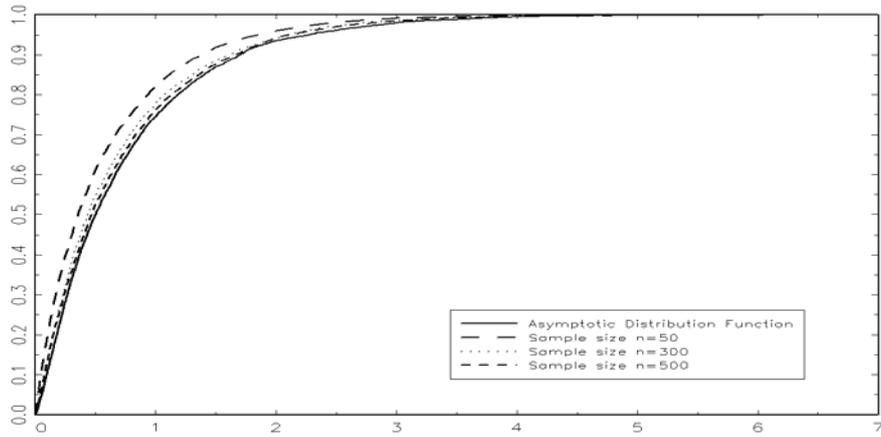
<그림 4.2> 우도비 검정통계량의 점근적 귀무분포와 실증분포($\Delta := [-0.5 \ 0.5]$)



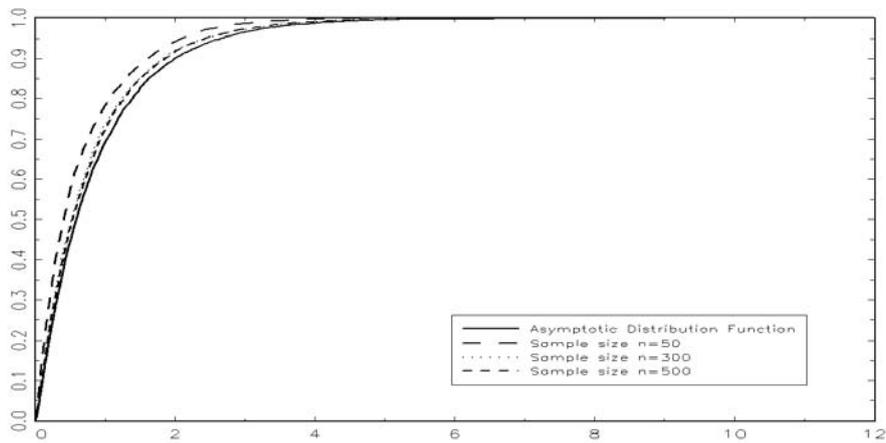
<그림 4.3> 라그랑주 검정통계량의 점근적 귀무분포와 실증분포($\Delta := [-0.5 \ 0.5]$)



<그림 4.4> Wald 검정통계량의 점근적 귀무분포와 실증분포($\Delta := [-1.0 \ 1.0]$)



<그림 4.5> 우도비 검정통계량의 점근적 귀무분포와 실증분포($\Delta := [-1.0 \ 1.0]$)



<그림 4.6> 라그랑주 검정통계량의 점근적 귀무분포와 실증분포($\Delta := [-1.0 \ 1.0]$)

Analyzing the Interrelationship of the Statistics for Testing Neglected Nonlinearity under the Null of Linearity

Yae Ji Jun⁵⁾ and Jin Seo Cho⁶⁾

Abstract

This paper analyzes the interrelationships among Wald, likelihood ratio, Lagrange multiplier statistics for testing neglected nonlinearity. We show that the three test statistics are equivalent under the null although there exists a twofold identification problem. This implies that the trinity property holds for the tests as for the standard case.

Key words: Neglected Nonlinearity, Wald statistics, likelihood ratio statistics, Lagrange multiplier statistics, Trinity.

5) First Author: 50 Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul, Department of Economics, Yonsei University. kotenra@naver.com.

6) Corresponding Author: 50 Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul, Department of Economics, Yonsei University. jinseocho@yonsei.ac.kr.